Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра вычислительных технологий

Паспорт зачета

по дисциплине «Математическая физика», 6 семестр

1. Методика оценки

Зачет проводится в форме письменного тестирования.

Тестовые задания охватывают все содержание «Математическая физика».

Тест состоит из 15 вопросов различного вида и позволяет проверить результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными в программе индикаторами достижения компетенций.

2. Критерии оценки результатов обучения, соотнесенных с уровнями освоения индикаторов достижения компетенций

Выполнение теста засчитывается на **продвинутом** уровне, если студент правильно ответил на все вопросы теста, знает определения всех понятий, продемонстрировал способность безошибочно устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, выявлять проблемы, предлагать механизмы их решения, представляет количественные и качественные характеристики определенных процессов и не допускает ошибок при решении задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций не содержит пробелов. Установленные в программе компетенции сформированы в полном объеме. Оценка составляет *от 35 до 40 баллов.*

Выполнение теста засчитывается на **базовом** уровне, если студент правильно ответил на ⅔ вопросов теста, знает определения основных понятий, продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, правильно характеризует процессы, явления, не допускает существенных ошибок при решении задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит несущественные пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на базовом уровне. Оценка составляет *от 34 до 27 баллов.*

Выполнение теста засчитывается на **пороговом** уровне, если студент правильно ответил от ½ до ⅔ вопросов теста, знает определения основных понятий, продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, при решении задач допускает непринципиальные ошибки, например, вычислительные. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на пороговом уровне. Оценка составляет *от 26 до 20 баллов.*

Выполнение теста считается **неудовлетворительным**, если студент правильно ответил менее чем на половину вопросов теста, не знает определений понятий, не продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, при решении задач допускает принципиальные ошибки. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов

достижения компетенций содержит существенные пробелы. Установленные в программе компетенции не сформированы. Оценка составляет *менее 20 баллов.*

3. Шкала оценки

Зачет считается сданным, если сумма баллов по всем заданиям билета составляет от 10 до 20 баллов включительно. Сумма менее 10 баллов признается неудовлетворительным результатом промежуточной аттестации по дисциплине.

В общей оценке по дисциплине баллы за зачет учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, установленными в НГТУ.

4. Примерный тест для зачета

Утверждаю:
Зав. кафедрой Выч.технол.____ Иткина Н.Б.
«____» _____ 20_ г.

Тест

по дисциплине «Математическая физика»[1]

Вопрос1:Определение гармонической функции
Ответ: Функция U(x) называется гармонической в конечной области D , если она в этой области дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Опр.: Функция U(x) называется гармоничной в бесконечной области D, если в каждой точке области D, находящейся на конечном расстоянии от начала, функция U(x) дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению Лапласа и на бесконечности имеет порядок $O(1/|x|^{m-2})$, так что для достаточно больших расстояний имеет место неравенство: |x| возрастает, следовательно, $|U(x)| \le C/|x|^{m-2}$, m – размерность пространства. Если m=2, то условие означает, что гармоническая функция в бесконечной области ограничена на бесконечности. Определение бесконечной функции не налагает никаких ограничений на поведение функции на границе области

Вопрос2: Привести линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных к каноническому виду можно (выбрать правильный ответ)

Ответ1: с помощью замены переменных;
*Ответ*2: выбирая новые координаты в пространстве решения;
*Ответ*3:осуществляя перенос начала координат;
*Ответ*4: решив уравнение в частных производных

Вопрос3:Определение объемного потенциала
Ответ: Пусть задана область $\bar{D}=D+S$, где S – граница, и пусть U – функция класса C_2. $U(M) = (1/4\Pi)*\int\{D\}LU/r\, d\tau - (1/4\Pi)*\int\{S\}\partial/\partial n(1/r)UdS + (1/4\Pi)*\int\{S\}(1/r)*\partial U/\partial n\, dS$ – это интегральное представление функции класса C_2. Будем говорить, что интегральное представление функции класса C_2 есть сумма потенциалов объёма, простого и двойного слоёв.
1. $V(M) = (1/4\Pi)*\int\{D\}\rho(N)/r\, d\tau$, $\rho(N)$ – плотность объёмного потенциала. Если решаем задачу Пуассона $LU = f(M)$, то f(M) определяет $\rho(N)$.

[1] Правильные ответы выделены жирным шрифтом

2. Потенциал двойного слоя. W(M) = –(1/4П)*∫{S}U∂(1/r)/∂n dS = ∫{S}μ(N)∂(1/r)/∂n dS, μ(N) – плотность потенциала двойного слоя. Неоднородное условие Дирихле $U|_S = \varphi(M)$ в задаче Пуассона можно связать с μ(N).
3. Потенциал простого слоя. Ψ(M) = (1/4П)∫{S}(1/r)*∂U/∂n dS = ∫{S}ν(N)/r dS, ν(N) – плотность потенциала простого слоя. Потенциал простого слоя связан с краевыми условиями Неймана $\partial U/\partial n|_S = \varphi_1(M)$ в задаче Пуассона.

Вопрос4:Какие решения уравнения характеристик соответствуют каноническому виду гиперболического уравнения в частных производных:
Ответ: два различных вещественных решения

Вопрос5:Определение интегрального уравнения Фредгольма второго рода
Ответ: Уравнение вида:$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,p)\varphi(p)dp$+f(s)
Называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Вопрос6:Математическая модель, описывающая процесс упругих колебаний
Ответ: Такими уравнениями описываются все волновые процессы. $\rho d^2U/dt^2 = div(pgradU) - qU + F(x,t)$ **(1)**, ρ,p,q – коэффициенты, определяющиеся свойствами среды, F(x,t) – интенсивность внешнего воздействия, $x=(x_1, x_2, x_3)$, t – время. $div(pgradU) = \sum\{i=1,3\}\partial/\partial x_i(p\partial U/\partial x_i)$.

Вопрос7:Уравнение свободных колебаний в простейшем одномерном случае (струна) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

какой физический смысл имеет неизвестная функция $u(x,t)$?

Ответ: $u(x,t)$ выражает отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, а скорость распространения колебаний по струне выражается константой $a > 0$

Вопрос8:Привести вид решения задачи о колебании одномерной струны (формула Даламбера)

Ответ:
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz.$$

Вопрос9:Задача Штурма-Лиувилля – это
Ответ: краевая задача для однородного дифференциального уравнения второго порядка с дополнительными условиями

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX(x)}{dx}\right] + \left[\lambda p(x) - q(x)\right]X(x) = 0$$
$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0$$
$$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0$$

Решения данной задачи, называются *собственными функциями* (значения параметра λ, которым соответствуют эти решения, называются *собственными значениями*).

Вопрос10:Теорема Стеклова

Ответ: Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям задачи **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и имеющая на отрезке $[0,l]$ непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x),\quad c_n=(f,X_n)/(X_n,X_n)=\int_0^l p(x)f(x)X_n(x)\,dx\Big/\int_0^l p(x)X_n^2(x)\,dx.$$

Вопрос11:Найти колебания струны с закреплёнными концами $x=0$ и $x=l$, возбуждённой начальным отклонением. Начальная скорость равна нулю.

Ответ: Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}u_{tt}&=a^2u_{xx},\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0\\ u(0,t)&=u(l,t)=0\\ u(x,0)&=f(x)\\ u_t(x,0)&=0\end{aligned}$$

В данном случае неоднородны только начальные условия. Будем искать решение в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$, тогда $u_{tt}=T''X$ и $u_{xx}=X''T$ (для краткости аргументы можно не писать). Подставляя этот вид в уравнение, разделим переменные:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

Такое равенство возможно только в том случае, если каждая часть (зависящая только от своей переменной) равна константе:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2.$$

Здесь присутствуют два равенства: $X''+\lambda^2X=0$ и $T''+\lambda^2a^2T=0$. Рассмотрим их в этом порядке.

Из краевых условий и предполагаемого вида решения имеем $X(0)=X(l)=0$. Тогда относительно $X(x)$ получается задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned}&X''+\lambda^2X=0\\ &X(0)=X(l)=0\end{aligned}$$

Решая это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и учитывая краевые условия, находим собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l},\quad X_n(x)=\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Согласно **Ошибка! Источник ссылки не найден.-Ошибка! Источник ссылки не найден.**, они будут ортогональны с весом $p(x)=1$. Подставляя найденные λ_n во второе равенство,

находим соответствующие функции $T_n(t)$:

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi nt}{l} + B_n \sin\frac{a\pi nt}{l}.$$

Записываем общий вид решения в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{a\pi nt}{l} + B_n \sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Здесь коэффициенты A_n и B_n подлежат определению из начальных условий задачи. Начнём с однородного условия для начальной скорости. Продифференцировав

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}\left(B_n \cos\frac{a\pi nt}{l} - A_n \sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

и подставив сюда $t = 0$, получаем

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l} B_n \sin\frac{\pi nx}{l} = 0,$$

откуда $B_n \equiv 0$. Учтя это и подставив условие для начального отклонения, получаем

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi nx}{l} = f(x).$$

Чтобы найти коэффициенты A_n, разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье по синусам согласно:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi nx}{l},$$
$$f_n = \int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx \Bigg/ \int_0^l \sin^2\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Отсюда $A_n = f_n$, и решением задачи является ряд Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\right]\sin\frac{a\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Вопрос12:Определение функции Грина

Ответ: Пусть в области Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma$ поставлена задача

$$\Delta u = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in\Omega$$
$$Lu\big|_\Gamma = \varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in\Gamma \qquad (1)$$

с некоторым дифференциальным оператором L, описывающим поведение функции на границе (возможно, составной).
Упростим (21, сделав эту задачу «почти однородной» и введя в неё дополнительный параметр $\mathbf{r}_0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r},\mathbf{r}_0 \in \Omega \\ &LG\big|_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение этой задачи называют функцией Грина для (1), и оно связано с решением исходной задачи следующей формулой:

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_{\Gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right) d\Gamma_{\mathbf{r}} - \int_{\Omega} G\cdot\Delta u \; d\Omega_{\mathbf{r}}.$$

Вопрос13:Определение гармонической функции (выбрать правильный ответ)

Ответ1: решение однородной эллиптической задачи
Ответ2:функция Грина
Ответ3 функция источника
Ответ4: аналитическое решение задачи о колебании струны

Вопрос14:Теорема о максимуме для эллиптической задачи
Ответ: Функция гармоническая внутри ограниченной области D и непрерывная в замкнутой области D достигает наибольшего (наименьшего) значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция является константой.

Вопрос15:Теорема об интегральном представлении функции класса C_2
Ответ: Если функция U(x,y,z) непрерывная и имеет производные $1^{го}$ и $2^{го}$ порядка всюду в области D, причём первые производные непрерывны вплоть до границы области S, а вторые непрерывны внутри области, то тогда имеет место формула: $U(M_0) = 1/4\Pi^* \int\{S\}[1/r^* \partial U/\partial n - U\,\partial/\partial n(1/r)]dS - 1/4\Pi^* \int\{D\}1/r^* LU d\tau$ (1), где r – расстояние, M_0 – фиксированная точка, M – произвольная точка в области D.